Prednáška 7

7.1. Úvod

Prečo potrebujeme Lebesgueov integrál?

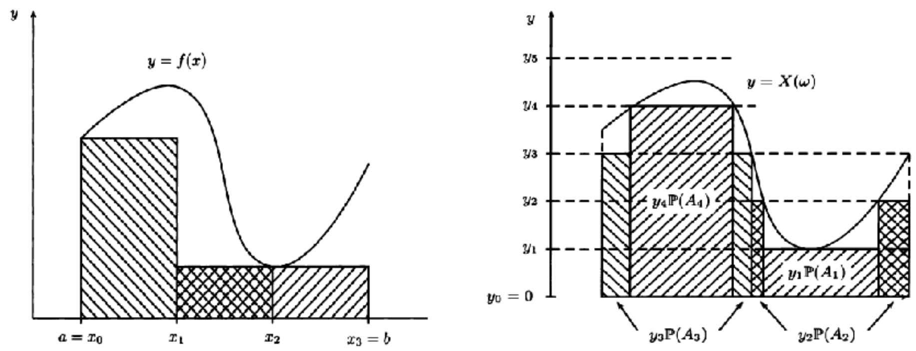
- umožňuje integrovať oveľa širšiu triedu funkcií
- veľa dôležitých tvrdení preňho platí pri slabších predpokladoch
- množina funkcií, ktoré majú konečný Lebesgueov integrál, má lepšie vlastnosti ako v prípade Riemannovho integrálu
- fyzici potrebujú v kvantovej mechanike dôležitý priestor Lebesgueovsky integrovateľných funkcií v kvadráte (Hilbertov priestor)

Príklad 7.1.1 ("Zo života fyzika")**.**

V matematicko-fyzikálnych modeloch spojité funkcie často nestačia, nedokážu popísať heterogénny materiál zložený zo zložiek rôznych vlastností. Pri využití princípu minima potenciálnej energie hľadáme minimum funkcionálu, v ktorom sa hľadaná funkcia integruje. Minimum hľadáme pomocou postupnosti funkcií, ktoré dávajú hodnoty funkcionálu konvergujúcich k minimu. Tieto funkcie konvergujú bodovo k hľadanej limitnej funkcii. Tu vzniká problém, pokiaľ pôvodné funkcie sú Riemannovsky integrovateľné, ich limita už taká nemusí byť.

Podstata rozdielu medzi Riemannovým a Lebesgueovým integrálom:

- Riemann - Interval $[a, b]$ rozdelíme na dostatočne malé intervaly $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $x_0 = a, x_n = b$, zoberieme približné príspevky $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ funkčných hodnôt na $[x_{i-1}, x_i]$ a sčítame ich.



Obr. 7.1: Základná myšlienka Riemannovho a Lebesgueovho integrálu.

Aby však tieto príspevky veľmi nezáležali na ξ_i, musia sa funkčné hodnoty na $[x_{i-1}, x_i]$ málo líšiť, ak bude dĺžka tohto intervalu dosť malá.

- Lebesgue - Rozdelíme na malé intervaly $[y_{i-1}, y_i]$ interval obsahujúci všetky hodnoty funkcie na intervale $[a, b]$. V každom z nich vezmeme nejaké c_i a sčítame približné príspevky $c_i\mu(M_i)$, kde $M_i \subset [a, b]$ je interval tých $x \in [a, b]$, pre ktoré je $f(x) \in [y_{i-1}, y_i]$ a $\mu(M_i)$ je ich veľkosť.

Príklad 7.1.2 (Zo života)**.**

Pokladník pri počítaní celodennej tržby môže postupovať dvoma spôsobmi:

1. Robí si kôpky peňazí, ktoré dostal od jednotlivých zákazníkov. Spočíta hodnotu každej kôpky a potom urobí súčet cez všetky kôpky.
2. Robí si kôpky peňazí rovnakej nominálnej hodnoty. Určí počet bankoviek (mincí) v každej kôpke a vynásobí ich danou nominálnou hodnotou. Nakoniec opäť urobí súčet cez všetky kôpky.

Lebesgueov integrál si vyžaduje, aby sme vedeli merať veľkosť - mieru všeobecnejších (zložitejších) množín ako sú intervaly.

7.2. Miera

Jednou z najstarších a zároveň najdôležitejších úloh je stanovenie dĺžky, obsahu či objemu kriviek, plôch či telies. Pri konštrukcii teórie, ktorá by bola schopná rozumne zachytiť veľkosť množiny (číslo, ktoré ju charakterizuje), sa prirodzene predpokladá, že dobre zavedená množinová funkcia bude mať niektoré "rozumné" a "intuitívne zrejmé" vlastnosti. Pozrime sa na situáciu na reálnej osi. Z toho, čo vieme, usudzujeme, že miera intervalu $[0,1]$ by mala byť rovná jednej. Pri posunutí intervalu sa veľkosť nezmení. Je prirodzené požadovať, aby množinová funkcia každej ohraničenej podmnožine $\mathbb{R}$ priradila nezápornú hodnotu a zjednoteniu dvoch disjunktných intervalov priradila súčet oboch hodnôt. Problém nastane, ak si vezmeme spočítateľne veľa disjunktných intervalov. Vtedy na $\mathbb{R}$ neexistuje nezáporná množinová funkcia s takýmito vlastnosťami. Bohužiaľ konečný počet nie je postačujúci (limitný charakter je zrejme nevyhnutný) a zároveň Banach ukázal, že pre $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, neexistujú konečne aditívne miery definované na všetkých ohraničených podmnožinách (pre $n = 1, 2$, existujú). Ešte horšie veci ukázal Banach s Tarskim (paradox) v roku 1924, ktorý jasne ilustruje, že už samotné priestory $\mathbb{R}^n$ obsahujú tak čudné množiny, že nemožno očakávať, že budeme schopní definovať geometricky zmysluplný pojem miery na všetkých ich podmnožinách. Preto sa musíme obmedziť na vhodné množinové systémy.

Definícia 7.2.1.

Nech X je nejaká množina a $\mathcal{G} \subset 2^X$. Ľubovoľná funkcia $\tau : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^* := [-\infty, \infty]$ sa nazýva množinová funkcia.

Príklad 7.2.2 (Pravdepodobnosť (hlava,orol))**.**

Nech $X = \{H, O\}$ a $\mathcal{G}_1 = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{G}_2 = \{\emptyset, \{H\}, \{O\}, X\}$, potom funkcia $P : \mathcal{G}_i \to [0,1]$ definovaná ako $P(A) = \frac{\#A}{\#X}$, $A \in \mathcal{G}_i$ je množinová funkcia.

Nech $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \leq b$. Intervalu I priraďme funkciu

$$l_1(I) = \begin{cases} b - a, & a < b \\ 0, & a = b \end{cases}.$$

Tá definuje na systéme všetkých intervalov množinovú funkciu, ktorá sa nazýva dĺžka intervalu. Z úvodu je zrejmé, že je vhodné mať taký systém množín, ktorý je uzavretý na rozdiel a zjednotenie množín.

Definícia 7.2.3.

Nech X je nejaká množina. Okruhom nazývame systém podmnožín $\mathcal{S} \subset 2^X$, pre ktorý platí

(a) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{S}$

(b) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{S}$

Príklad 7.2.4.

Nech X je množina, potom 2^X je okruh.
Množina otvorených množín v $\mathbb{R}$ netvorí okruh (prečo ?).

Problém 7.2.5.

Môžu tvoriť okruh všetky uzavreté množiny v $\mathbb{R}$?
Tvorí okruh systém $\{A, B, \emptyset, A \setminus B, B \setminus A, A \cup B, A \triangle B\}, A \neq B, A, B \neq \emptyset$?

Veta 7.2.6.

Vlastnosti okruhu $\mathcal{S}$: Ak $A, B \in \mathcal{S}$, $A_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, potom

(I) $\emptyset \in \mathcal{S}$

(II) $A \cap B \in \mathcal{S}$

(III) $A \triangle B \in \mathcal{S}$

(i) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{S}$

(ii) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{S}$

Chýba nám však dôležitá vlastnosť a to tá, že potrebujeme uzavretosť na spočítateľné zjednotenie.

Definícia 7.2.7.

Okruh $\mathcal{S}$ sa nazýva σ-okruhom, ak pre každú postupnosť prvkov $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $\mathcal{S}$ je aj

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}.$$

Poznámka 7.2.8.

Ak v predchádzajúcich definíciách pridáme vlastnosť $X \in \mathcal{S}$, tak hovoríme o algebre, σ-algebre.

Z toho hneď máme, že

$$A_n \in \mathcal{S},\ n = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S},$$

keď'že

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_i).$$

Otázka je, aký systém je okruhom v priestore $\mathbb{R}^n$? čo je vlastne interval v $\mathbb{R}^n$?

Definícia 7.2.9.

Intervalom v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ nazveme množinu tvaru $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, kde I_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, je interval v $\mathbb{R}$.

Príklad 7.2.10.

(a) $\{\emptyset, X\}$ tvorí σ-okruh

(b) 2^X tvorí σ-okruh

(c) $\mathcal{S}_n$ - množina ohraničených intervalov v $\mathbb{R}^n$ netvorí ani okruh (iba tzv. semi-okruh)!

Úsečky na priamke sú teda prvky $\mathcal{S}_1$, obdĺžniky (so stranami rovnobežnými s osami) sú prvky $\mathcal{S}_2$, kvádre (so stenami rovnobežnými s rovinami tvorenými osami) sú prvky $\mathcal{S}_3$. Pozn. priestor $(X, \mathcal{S})$ nazývame merateľný.

Musíme teda zaviesť nejaký iný systém intervalov v $\mathbb{R}^n$, tak aby to bol okruh. Má teda vlastnosti z vety 7.2.6. Ide o množinu všetkých množín v $\mathbb{R}^n$, ktoré sa dajú napísať ako zjednotenie konečného počtu intervalov.

Poznámka 7.2.11.

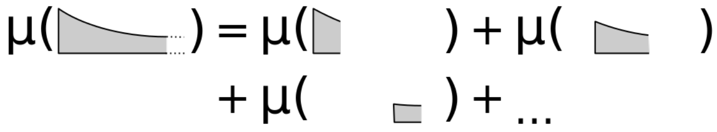
Systém $\mathcal{E}_n = \left\{ A \subset \mathcal{S}_n : \exists\, A_i,\ i = 1, 2, \ldots, k,\ A_i \in \mathcal{S}_n,\ A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right\}$ tvorí okruh.

Ďalšia otázka je, ako vhodne zaviesť množinovú funkciu tak, aby by "dobre" merala množiny v $\mathbb{R}^n$?

Definícia 7.2.12.

Množinová funkcia τ na okruhu $\mathcal{S} \neq \emptyset$ je aditívna, ak pre každé disjunktné $A, B \in \mathcal{S}$ platí $\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B)$. Množinová funkcia τ_s na σ-okruhu $\mathcal{S} \neq \emptyset$ je σ-aditívna, ak pre každé po dvoch disjunktné $A_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots$ platí

$$\tau_s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_s(A_i).$$



Obr. 7.2: σ-aditivita množinovej funkcie μ.

Veta 7.2.13.

Vlastnosti aditívnej a σ-aditívnej množinovej funkcie τ, τ_s na okruhu $\mathcal{S}$ a σ-okruhu Σ:

1. $\tau(\emptyset) = 0$
2. $\tau\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} \tau(A_i)$ pre disjunktné množiny $A_i \in \mathcal{S},\ i = 1, 2, \ldots, k$
3. $\tau(A) + \tau(B) = \tau(A \cup B) + \tau(A \cap B)$ pre $A, B \in \mathcal{S}$
4. $A \subset B,\ A, B \in \mathcal{S}$ a $\tau(A) < \infty \ \Rightarrow \tau(B \setminus A) = \tau(B) - \tau(A)$

Nech je naviac τ nezáporná, potom

5. $A \subset B \ \Rightarrow \tau(A) \leq \tau(B)$
6. $\tau(A \cup B) \leq \tau(A) + \tau(B)$ a $\tau\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \tau(A_i),\ \ A_i \in \mathcal{S}$
7. pre $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Sigma$: $\tau_s\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \tau_s(A_i)$

Definícia 7.2.14.

Nezáporná σ-aditívna množinová funkcia μ definovaná na σ-okruhu $\mathcal{S}$ sa nazýva miera. Priestor s mierou je trojica $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_n \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dd, leftrightarrow] & \mathcal{E}_n \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dd, leftrightarrow] & 2^{\mathbb{R}^n} \arrow[dd, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
 & & & \mathcal{M}_n \\
m_n \arrow[r, leftrightarrow] & \tilde{m}_n \arrow[r, leftrightarrow] & \mu_n^* \arrow[ur, leftrightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

Obr. 7.3: Konštrukcia Lebesgueovej miery

Príklad 7.2.15.

(a) triviálna miera - $X \neq 0,\ \mu(A) = 0$ pre každú $A \in \mathcal{S}$

(b) Diracova miera - $X \neq 0, \mathcal{S} = 2^X,\ x \in X,\ \mu(A) = \delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$, pre každú $A \subset X$.

(c) aritmetická (sčítacia) miera - $X \neq 0,\ \mu(A) = \#A$ pre každú $A \in \mathcal{S}$

(d) pravdepodobnostná miera - ľubovoľná normovaná ($\mu(X) = 1$)

7.3. Konštrukcia Lebesgueovej miery

Prejdeme k dôležitej definícii, ktorá predstavuje v matematike štandardný postup, ktorým je podmnožine Euklidovho priestoru priradená dĺžka, obsah plochy alebo objem. Lebesgueova miera je zovšeobecnením pojmu objem.

Pre systém $\mathcal{S}_n$ je ľahko definovaná miera prislúchajúca konceptu "objemu" známemu v elementárnej geometrii. Ak $I = \prod_{i=1}^n I_i \in \mathcal{S}_n$, potom elementárny objem označený

$$m_n(I) = m_n\left(\prod_{i=1}^n I_i\right) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n).$$

Zrejme takto definovaná množinová funkcia spĺňa vlastnosti miery na systéme $\mathcal{S}_n$. Nie je to však okruh a tak je otázka ako rozšíriť mieru na okruh $\mathcal{E}_n$ tak, aby sa zachovala nezápornosť a aditivita. Platí však existencia disjunktného rozkladu, teda pre každú $A \in \mathcal{E}_n$ existujú intervaly $K_1, \ldots, K_p \in \mathcal{S}_n$ tak, že $A = \bigcup_{i=1}^p K_i,\ \ K_i \cap K_j = \emptyset,\ i \neq j$. Takýto rozklad nie je jediný, ale to nám nevadí.

Veta 7.3.1 (O rozšírení miery na $\mathcal{E}_n$).

Existuje práve jedna funkcia $\tilde{m}_n$ na systéme množín $\mathcal{E}_n$ s vlastnosťami

(a) $\tilde{m}_n(A) = m_n(A),\ A \in \mathcal{S}_n$

(b) $\tilde{m}_n(A \cup B) = \tilde{m}_n(A) + \tilde{m}_n(B),\ A, B \in \mathcal{E}_n,\ A \cap B = \emptyset$

(c) je daná predpisom

$$\tilde{m}_n(A) = \sum_{i=1}^{p} m_n(K_i),\ A \in \mathcal{E}_n$$

(K_i tvoria disjunktný rozklad A)

(d) $\tilde{m}_n(A) \in \mathbb{R}_0^+$

(e) $\tilde{m}_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{m}_n(A_i),\ A_i \in \mathcal{E}_n,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$

(f) $\tilde{m}_n(A) + \tilde{m}_n(B) = \tilde{m}_n(A \cup B) + \tilde{m}_n(A \cap B),\ \ A, B \in \mathcal{E}_n$

(g) $\tilde{m}_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \tilde{m}_n(A_i),\ A_i \in \mathcal{E}_n$

(h) $\tilde{m}_n(A) \leq \tilde{m}_n(B),\ A, B \in \mathcal{E}_n,\ A \subset B$

Pre posledné rozšírenie potrebujeme nasledujúcu vlastnosť miery, ktorá nám dáva možnosť aproximovať merateľné množiny otvorenými aj uzavretými množinami.

Lema 7.3.2 (Regularita miery).

Ku každému $A \in \mathcal{E}_n$ a každému $\varepsilon > 0$ existujú také F_ε uzavretá, G_ε otvorená z $\mathcal{E}_n$, $\ F_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon$, že platí

$$\tilde{m}_n(A) \geq \tilde{m}_n(F_\varepsilon) \geq \tilde{m}_n(A) - \varepsilon,$$

$$\tilde{m}_n(A) \leq \tilde{m}_n(G_\varepsilon) \leq \tilde{m}_n(A) + \varepsilon.$$

Teraz už môžeme prejsť k rozšíreniu (a následnému zúženiu) miery $\tilde{m}_n$ na iný systém podmnožín $\mathcal{M}_n$, pre ktorý bude $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{M}_n$ a zároveň bude σ-algebrou. Najprv si definujeme mieru ľubovoľnej množiny, teda množiny z $2^{\mathbb{R}^n}$. Platí, že ku každému $A \subset \mathbb{R}^n$ existuje postupnosť otvorených intervalov $I_i \in \mathcal{S}_n,\ i \in \mathbb{N}$ tak, že $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$.

Definícia 7.3.3.

Číslo

$$\mu_n^*(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{m}_n(M_i),\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i,\ M_i \in \mathcal{E}_n,\ M_i \text{ je otvorená}\right\}$$

nazývame vonkajšia miera.

Problém 7.3.4.

Ukážte, že pre každú ohraničenú množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ je $\mu_n^*(A) < \infty$.

Príklad 7.3.5.

Nech $A \subset \mathbb{R}^n$ je konečná alebo spočítateľná. Potom $\mu_n^*(A) = 0$. Špeciálne $\mu_n^*(\mathbb{Q}^n) = 0$.

Poznámka 7.3.6.

Vonkajšia miera odhaduje "veľkosť"danej množiny pomocou ich pokrytia z $\mathcal{E}_n$, ktoré vieme merať. Je veľmi dôležité, že berieme spočítateľné pokrytia. Keby sme brali infimum len cez konečné pokrytia, dostali by sme príliš hrubý odhad (napr. $\mu_1^*(A) = 1, A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$). Bohužiaľ aj pre spočítateľné pokrytia existujú také množiny (voláme ich nemerateľné, príkladom je Vitaliho množina).

Veta 7.3.7 (Vlastnosti vonkajšej miery)**.**

(I) $\mu_n^*(A) \in [0, \infty],\ A \in \mathbb{R}^n$

(II) $\mu_n^*(\emptyset) = 0$

(III) $\mu_n^*(A) \le \mu_n^*(B),\ A \subset B,\ A, B \in \mathbb{R}^n$

(IV) $\mu_n^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n^*(A_i),\ A_i \in \mathbb{R}^n$

(V) $\mu_n^*(A) = \tilde{m}_n(A),\ A \in \mathcal{E}_n$

Dôsledok 7.3.8.

$\mu_n^*(\mathbb{R}^n) = \infty$.

Definícia 7.3.9.

Hovoríme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je nulová (má nulovú mieru), ak $\mu_n^*(A) = 0$. Mieru ν (priestor (X, Σ, ν)) nazývame úplná(ý), akk $S \subseteq N \in \Sigma$ a $\nu(N) = 0 \Rightarrow S \in \Sigma$.

Následujúca veta nám hovorí aj o tom, že miera μ_n^* je úplná. Je to dôležité. Pozrime sa na nasledujúcu úvahu. Majme definovanú mieru ν_1^*, ktorá má vlastnosti miery μ_1^*. Povedzme, že ju chceme jednoducho rozšíriť v priestore $\mathbb{R}^2$ pomocou kartézskeho súčinu, t.j. vezmeme najmenšiu $\sigma-$algebru $\mathcal{S} = \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ obsahujúcu všetky merateľné (napr. ohraničené) "obdĺžniky" a definujeme mieru ako súčin, tj. $\nu_2^*(A \times B) = \nu_1^*(A) \cdot \nu_1^*(B),\ \ A, B \in \mathcal{T}$. Dá sa ukázať, že máme definovaný merateľný priestor s mierou. No miera nie je definovaná dobre, lebo pre každú $A \in \mathcal{T} : \nu_1^*(A) = 0$ a každú $B \in \mathcal{T}$ máme $\nu_2^*(A \times B) = 0$. Avšak predpokladajme, že B je nemerateľná (Vitaliho množina), potom $\nu_2^*(A \times B)$ nie je definovaná, ale $A \times B \subsetneq A \times C$, kde C je merateľná a pokryje B a $\nu_2^*(A \times C) = 0$.

Veta 7.3.10.

Ak $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ a B je nulová, potom aj A je nulová. Nech $A_i \subset \mathbb{R}^n,\ i \in \mathbb{N}$ sú nulové, potom aj ich zjednotenie je nulové.

Máme teda merateľný priestor, v ktorom každá podmnožina množiny miery nula je merateľná. Prejdeme teraz k definícii merateľných množín v euklidovských priestoroch. To preto, lebo na množine systéme $2^{\mathbb{R}^n}$ nie je miera μ_n^* ani aditívna, nie to ešte $\sigma-$aditívna.

Definícia 7.3.11.

Hovoríme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je konečne merateľná, ak existuje postupnosť množín $A_n \in \mathcal{E}_n,\ n \in \mathbb{N}$, že $\mu_n^*(A \triangle A_n) \to 0$ pre $n \to \infty$. Množinu konečne merateľných množín značíme $\mathcal{M}_n^f$. Povieme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je merateľná, ak je zjednotením konečného alebo spočítateľného systému konečne merateľných množín. Množinu merateľných množín značíme $\mathcal{M}_n$.

Poznámka 7.3.12.

Pre $A, B \subset \mathbb{R}^n$ označuje symetrická diferencia $A \triangle B$ to, čím sa od seba líšia množiny A, B. Ak si označíme $\rho(A, B) = \mu_n^*(A \triangle B)$, potom je $\rho(A, B) \geq 0$, $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ a $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$ (dokážte za cvičenie). Z vlastností definície metriky neplatí iba $\rho(A, B) = 0 \Rightarrow A = B$, ale iba že sa množiny A, B od seba líšia o nulovú množinu. Konečne merateľná množina je teda taká, že je limitou (vzhľadom k ρ) postupnosti množín z $\mathcal{E}_n$.

Definícia 7.3.13.

Zúžením vonkajšej miery μ_n^* na množinu $\mathcal{M}_n$ nazveme Lebesgueovou mierou v $\mathbb{R}^n$ a označíme ju λ_n.

Poznámka 7.3.14.

$\mathcal{E}_n \subset \mathcal{M}_n^f$, keďže v definícii stačí položiť $A_n = A,\ n \in \mathbb{N}$.

Veta 7.3.15 (Vlastnosti systému $\mathcal{M}_n$)**.**

1. $A, B \in \mathcal{M}_n \Rightarrow (A \setminus B) \in \mathcal{M}_n$
2. $A_i \in \mathcal{M}_n,\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}_n$
3. $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_n$
4. na $\mathcal{M}_n$ je λ_n $\sigma-$aditívna
5. $\mathcal{M}_n^f = \{A : A \in \mathcal{M}_n,\ \lambda_n(A) < \infty\}$

Veta 7.3.16 (Postačujúce podmienky merateľnosti množiny)**.**

$\mathcal{M}_n$ obsahuje

1. všetky množiny z $\mathcal{E}_n$
2. všetky otvorené a uzavreté množiny z $\mathbb{R}^n$ $(\emptyset,\ \mathbb{R}^n)$
3. zjednotenia a prieniky spočítateľného systému množín z 1. , 2.

Príklad 7.3.17.

Nech zobrazenie $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je definované na intervale $I \in \mathcal{S}_m$ a je tam lipschitzovsky spojité, potom je $\lambda_{n+m}(\mathrm{gr}(\mathbf{f})) = 0$ a pre $n > m$ tiež $\lambda_n(H_\mathbf{f}) = 0$.

Definícia 7.3.18.

Povieme, že nejaká vlastnosť platí skoro všade (s.v.) na množine M, ak má množina $N \subset M$ tých bodov $x \in M$, pre ktoré to neplatí, mieru 0.